Partie III : Etude de I_n pour $n \geqslant 2$

1°) a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'intégrale K_n est convergente.

b) Etablir, pour tout entier $n \geqslant 2$: $|K_n| \leqslant \frac{1}{n-1}$.

2°) a) Montrer que la suite $(J_n)_{n>2}$ est décroissante.

b) Montrer que la suite $(J_n)_{n>2}$ converge ; on note ℓ sa limite.

c) Etablir, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel $a \in]0,1[$:

$$\int_0^a (\varphi(t))^n \, dt \leqslant a \text{ et } \int_a^1 (\varphi(t))^n \, dt \leqslant (1-a)(\varphi(a))^n$$

(On pourra utiliser I. 2°).)

d) En déduire, pour tout réel $a \in]0,1[$: $0 \leqslant \ell \leqslant a$, et conclure : $\ell = 0$.

1°) Montrer, pour tout entier $p \geqslant 1$: $K_{2p} + K_{2p+1} \geqslant 0$.

2°) En déduire, pour tout entier $N \geqslant 1$:

$$\sum_{p=1}^{N} (I_{2p} + I_{2p+1}) \geqslant \sum_{p=1}^{N} (J_{2p} + J_{2p+1})$$

3°) En déduire que la série $\sum_{n>2} I_n$ diverge. (On pourra utiliser I. 3°) b)).